مطالعه‌ی رزونانس‌ها و رفتار آشوبناک سیستم تعلیق خودرو با پارامترهای غیرخطی*

موسی رضائی[۱]   حامد سمندری[۲]

چکیده با توسعه‌ی سیستم‌های تعلیق و استفاده از دمپرهای الکترومغناطیسی، مطالعه‌ی رفتار غیرخطی و آشوبناک سیستم تعلیق تحت تحریک جاده اهمیت ویژه‌ای پیدا کرده است. در عمده‌ی تحقیقات انجام‌شده در زمینه مطالعه‌ی رفتار آشوبناک خودرو، از مدل یک‌چهارم خودرو با یک یا دو درجه آزادی استفاده شده است که در این مدل‌ها صرفاً حرکت عمودی جرم‌های فنربندی شده و فنربندی نشده لحاظ می‌شود و از مد ارتعاشی حرکت کله‌زنی خودرو صرف‌نظر می‌شود. در تحقیق حاضر برای دست‌یابی به مدل واقع‌بینانه‌تر با در نظر گرفتن اثرات غیرخطی برای سیستم تعلیق خودرو، رفتار دینامیکی خودرو با استفاده از مدل نصف خودرو با چهار درجه آزادی مورد مطالعه قرار گرفته است و از نمودارهای پاسخ فرکانسی، چندگانگی و پوآنکاره برای شناسایی نواحی آشوبناک در پاسخ استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد که در اثر نزدیکی دو رزونانس اصلی حرکت عمودی و کله‌زنی خودرو، پاسخ اجباری سیستم دچار تغییرات عمده‌ای می‌شود. نواحی ناپایدار جدیدی در مقایسه با مدل یک‌چهارم در پاسخ فرکانسی سیستم مشاهده می‌شود. هم‌چنین نتایج نشان می‌دهد که تشدید حاصل از رزونانس اصلی حرکت کله‌زنی، سبب تغییر محل گذار سیستم از پاسخ آرام به پاسخ آشوبناک می‌شود.

واژه‌های کلیدی مدل نصف خودرو، سیستم تعلیق، ارتعاشات غیرخطی، آشوب، دوشاخگی.

An investigation on the Resonances and Chaotic Behavior of a Nonlinear Vehicle Suspension System

M. Rezaee   H. Samandari

Abstract *In recent years, more attention has been paid on intelligent vehicle suspension systems equipped with magneto-rheological dampers. In order to investigate nonlinear vehicle dynamics, in the majority of the researches, a quarter-car model with one or two degrees of freedom is used. In such simple models, one can only study the bounce motion of sprung and unsprung masses. In this paper, in order to consider more realistic model for vehicle suspension system, a nonlinear half car model with four degrees of freedom is employed. Frequency response diagrams of the model have been obtained. In order to identify the region of excitation frequency in which the system has chaotic behavior, the bifurcation and Poincare maps are used. Results show that near the heave and pitch natural frequencies, the system forced response has been changed considerably and new unstable region has been appeared in frequency diagrams. Moreover, results show that in comparison with quarter car model, the resonant frequency of pitch motion intensifies the chaotic response.*

Key Words Half-car model, suspension system, Non-linear vibration, Chaos, Bifurcation.

---

*تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۹/۱۰/۱۵ و تاریخ پذیرش آن ۱۳۹۱/۸/۲۰ می‌باشد.

(۱) نویسنده‌ی مسؤول: دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز.

(۲) دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز.

مقدمه

از زمان پیدایش صنعت خودروسازی، در طراحی سیستم تعلیق خودرو همواره تضادی بین تأمین دو مقوله‌ی راحتی سفر (Ride) و قابلیت مانور (Handling) خودرو وجود داشته است. سیستم تعلیق نرم، به معنای تأمین راحتی سفر است در حالی که برای افزایش قابلیت مانور خودرو، سیستم تعلیق سفت مناسب‌تر است. مدل‌سازی ارتعاشی خودرو با استفاده از مدل‌های ریاضی به‌منظور کاهش ارتعاشات ناخواسته و افزایش پایداری خودرو در تحقیقات اخیر مورد توجه قرار گرفته است [1-6].

در تحلیل رفتار دینامیکی سیستم تعلیق خودرو، اجزای ارتعاشی سیستم تعلیق در سه دسته‌ی کلی بدنه‌ی خودرو (Sprung mass)، سیستم تعلیق و چرخ‌ها (Unsprung mass) قرار می‌گیرند. بر این اساس مدل‌های ارائه‌شده برای مطالعه‌ی رفتار دینامیکی سیستم تعلیق خودرو را می‌توان به سه دسته شامل مدل یک‌چهارم خودرو، مدل نصف خودرو و مدل کامل خودرو تقسیم کرد. در مدل یک‌چهارم خودرو، بدنه با یک فنر و دمپر به چرخ و از طریق آن به جاده مرتبط است [7,8]. مجموعه‌ی چرخ، ترمزها و میله‌های رابط تعلیق به‌عنوان جرم فنربندی‌نشده شناخته می‌شوند. از این مدل برای مطالعه‌ی حرکت ارتعاش عمودی (Heave) خودرو استفاده می‌شود. از پرکاربردترین مدل‌ها در بررسی رفتار دینامیکی خودرو، مدل نصف خودرو می‌باشد. این مدل برای بررسی حرکت ارتعاش عمودی و کله‌زنی (Pitch) خودرو مورد استفاده قرار می‌گیرد [9,10]. در مدل دیگری برای نصف خودرو، با انتخاب دو چرخ جلو می‌توان به بررسی حرکت ارتعاش عمودی و چرخشی حول محور طولی خودرو (Roll) پرداخت.

تاکنون برای مطالعه‌ی دینامیک خودرو، به‌علت پیچیدگی‌های ریاضی و عدم وجود مدل مناسب برای شبیه‌سازی رفتار اجزای تشکیل‌دهنده‌ی سیستم تعلیق خودرو، از مدل‌های ریاضی خطی‌سازی‌شده به‌منظور مدل‌سازی رفتار سیستم تعلیق استفاده شده است. این مسأله با افزایش درجات آزادی در نظر گرفته‌شده برای سیستم تعلیق نمود بیش‌تری می‌یابد. در مطالعه‌ی سیستم‌های غیرخطی، امکان مشاهده‌ی پدیده‌های غیرخطی از جمله آشوب و پرش وجود دارد که این رفتارها در تحقیقات مبتنی بر مدل‌های خطی قابل مشاهده نیستند [11,12]. با ورود مدل‌های غیرخطی اجزای تشکیل‌دهنده‌ی خودرو، مدل‌های معرفی‌شده برای خودرو مورد بازبینی قرار گرفته‌اند.

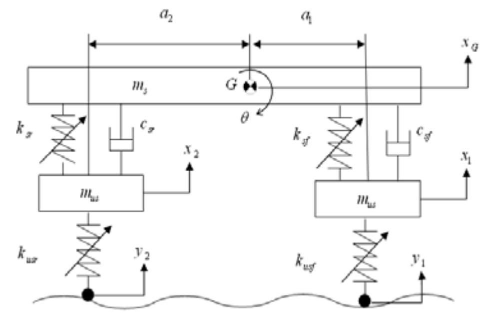
توسعه‌ی مدل‌های غیرخطی ابتدا با در نظر گرفتن رفتار غیرخطی برای سفتی فنر در سیستم تعلیق و سفتی تایر آغاز شد. در تحقیقات بعدی رفتار غیرخطی دمپر نیز مورد توجه قرار گرفت. در عمده‌ی تحقیقات انجام‌شده، رفتار غیرخطی دمپر به‌صورت دو خطی (Bilinear) منظور شده است [11] . توسعه‌ی این مدل‌ها با معرفی دمپرهای الکترومغناطیسی در صنعت خودروسازی که دارای ویژگی غیرخطی و هیستریستیک هستند وارد مرحله‌ای تازه شد در ضربه‌گیرهای هیدرولیکی، میرایی از حرکت سیال ویسکوز در درون سیلندر حاصل می‌شود [13]؛ اما در ضربه‌گیرهای الکترومغناطیسی این وظیفه بر عهده‌ی سیال الکترومغناطیس می‌باشد هم‌چنین نوع سیال بکار رفته در این دمپرها سبب شده است تا بتوان به کمک جریان الکتریسیته میزان ویسکوزیته سیال و در نتیجه نیروی میرایی تولیدشده در آن را کنترل کرد [14,15]. در تحقیقات انجام‌شده به‌منظور شبیه‌سازی رفتار این نوع از دمپرها به‌علت پیچیدگی‌های ریاضی مسأله از مدل یک‌چهارم خودرو استفاده شده است [16-19].

در این تحقیق به‌منظور در نظر گرفتن مدل واقع‌بینانه‌تر برای سیستم تعلیق خودرو در مقایسه با مدل ساده یک‌چهارم به‌کار گرفته شده در مراجع مذکور، از مدل غیر خطی نصف خودرو استفاده شده است. در مدل مورد استفاده با در نظر گرفتن اثرات

غیرخطی سیستم تعلیق، پاسخ فرکانسی سیستم و عوامل تأثیرگذار بر رفتار سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. برای پیش‌بینی و آنالیز پدیده‌های مربوط به آشوب در استخراج پاسخ سیستم از روش‌های عددی استفاده شده است و از نمودارهای پاسخ فرکانسی، چندگانگی (Bifurcation) و پوآنکاره (Poincaré map)، برای شناسایی نواحی آشوبناک در پاسخ استفاده شده است. در مدل یک‌چهارم امکان شناسایی رفتار کله‌زنی خودرو وجود ندارد لذا در تحقیق حاضر، پاسخ فرکانسی حرکت کله‌زنی نیز مورد بررسی قرار گرفته است. هم‌چنین، استفاده از مدل نصف خودرو امکان بررسی رفتار دینامیکی خودرو تحت تأثیر تأخیر زمانی را فراهم می‌سازد. در ناحیه‌ی ناپایدار پاسخ فرکانسی، به کمک نمودارهای چندگانگی، تأثیر تأخیر زمانی بر پاسخ اجباری سیستم نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

مدل سازی

به علت پیچیدگی‌های رفتاری موجود در سیستم تعلیق، در تحقیقات انجام‌شده تاکنون با افزایش درجات آزادی مدل مورد استفاده برای سیستم تعلیق، محققان از مدل‌های ریاضی ساده‌تر به‌منظور شبیه‌سازی رفتار دینامیکی استفاده کرده‌اند. در تحقیق انجام‌شده در مراجع [16-19] با وجود در نظر گرفتن اثرات اجزای غیرخطی، مدلی که برای شبیه‌سازی رفتار خودرو استفاده شده است مدل یک‌چهارم خودرو با یک درجه آزادی یا مدل یک‌چهارم خودرو با دو درجه آزادی بوده است. در مدل غیرخطی یک‌چهارم خودرو، تنها بررسی حرکت عمودی خودرو امکان‌پذیر است. در این تحقیق، در جهت رفع این نقیصه، از مدل نصف خودرو استفاده شده است. با استفاده از مدل نصف خودروی حاضر که شامل چرخ‌های جلو و عقب است امکان بررسی حرکت کله‌زنی خودرو و هم‌چنین تأثیر آن بر حرکات دیگر خودرو وجود دارد (شکل ۱). به‌منظور حفظ امکان مقایسه‌ی تأثیر افزایش درجات آزادی در تحلیل رفتار دینامیکی خودرو، نحوه‌ی شبیه‌سازی اجزای سیستم تعلیق تا حد امکان مشابه مدل یک‌چهارم خودرو در نظر گرفته شده است.



شکل ۱ مدل غیرخطی نصف خودرو با چهار درجه آزادی تحت تحریک جاده

مدل مورد استفاده، مدل نصف خودرو با چهار درجه آزادی است. چرخ جلو و عقب به همراه متعلقات وابسته به هر یک به‌عنوان یک درجه آزادی در نظر گرفته شده است که x_1 و x_2 به ترتیب بیان‌گر تغییر مکان عمودی آن‌ها می‌باشد. بدنه‌ی خودرو، یا جرم فنربندی شده، به شکل یک جسم صلب مدل شده است که دارای دو درجه آزادی (x_G و θ) است. برای نام‌گذاری کمیت‌های مربوط به جرم‌های فنربندی‌نشده (Unsprung mass) از زیرنویس us و برای نام‌گذاری کمیت‌های مربوط به جرم فنربندی شده (Sprung mass) از زیرنویس s استفاده شده است. هم‌چنین برای نام‌گذاری کمیت‌های مربوط به چرخ جلو از زیرنویس f و برای نام‌گذاری کمیت‌های مربوط به چرخ عقب از زیرنویس r استفاده شده است. در مدل ریاضی استفاده‌شده برای چرخ از میرائی موجود در تایر در مقابل میرائی سیستم تعلیق صرف‌نظر شده (همانند مرجع [20]) و سفتی تایر به‌صورت سخت‌شونده در نظر گرفته شده است. رابطه‌ی نیرو و جابه‌جایی در چرخ‌ها به‌صورت زیر در

نظر گرفته می‌شود:
برای چرخ جلو:

$$F_{k_{usf}} = k_{usf}(x_1 - y_1) + \varepsilon k_{usf}(x_1 - y_1)^3 \quad (١)$$

برای چرخ عقب:

$$F_{k_{usr}} = k_{usr}(x_2 - y_2) + \varepsilon k_{usr}(x_2 - y_2)^3 \quad (٢)$$

در روابط فوق ε نشان دهنده میزان غیرخطی بودن سفتی تایر می‌باشد. y_1 و y_2 به ترتیب بیان‌گر تحریک جاده بر روی چرخ جلو و عقب می‌باشند.

برای مدل‌سازی سفتی و میرایی سیستم تعلیق، از مدل ریاضی ارائه‌شده در مراجع [17-19] استفاده شده است. در این مدل سفتی سیستم تعلیق خودرو از نوع نرم‌شونده در نظر گرفته شده است که از رابطه‌ی زیر تبعیت می‌کند:

$$F_s = k_s \Delta x - \alpha k_s (\Delta x)^3 \quad (٣)$$

که در این رابطه F_s نیروی تولید شده در فنر سیستم تعلیق و Δx جابه‌جایی نسبی دو سر فنر می‌باشد. کمیت α نشان‌دهنده‌ی میزان رفتار غیرخطی فنر خودرو است. مدل ریاضی مورد استفاده برای دمپر، که در رابطه‌ی (٤) ارائه شده است با مدل‌های معمول ریاضی ارائه شده برای مدل‌سازی دمپرهای هیدرولیکی متفاوت است. این تفاوت منشأ فیزیکی داشته و علت آن استفاده از دمپرهای الکترومغناطیسی و هیستریستیک در سیستم تعلیق خودرو است [21,22].

$$F_c = -c_s \Delta V + \eta c_s (\Delta V)^3 \quad (٤)$$

در رابطه‌ی فوق F_c نیروی تولیدشده در دمپر سیستم تعلیق و ΔV تغییرات سرعت نسبی دو سر دمپر می‌باشد. η کمیتی است که تغییر آن سبب تغییر رفتار غیرخطی میرایی سیستم تعلیق خودرو می‌شود.

روابط مذکور با توجه به ویژگی‌های عمومی مدل نصف خودرو مورد بازبینی قرار گرفت. برای میرایی و سفتی سیستم تعلیق در مدل نصف خودرو خواهیم داشت:
برای فنر و دمپر جلو:

$$F_{k_{sf}} = k_{sf}(x - x_1 - a_1 \sin\theta) - \alpha k_{sf}(x - x_1 - a_1 \sin\theta)^3 \quad (٥)$$

$$F_{c_{sf}} = -c_{sf}\frac{d}{dt}(x - x_1 - a_1 \sin\theta) + \eta c_{sf}\left[\frac{d}{dt}\left(x - x_1 - a_1 \sin\theta\right)\right]^3 \quad (٦)$$

برای فنر و دمپر عقب:

$$F_{k_{sr}} = k_{sr}(x - x_2 + a_2 \sin\theta) - \alpha k_{sf}(x - x_2 + a_2 \sin\theta)^3 \quad (٧)$$

$$F_{c_{sr}} = -c_{sr}\frac{d}{dt}(x - x_2 + a_2 \sin\theta) + \eta c_{sr}\left[\frac{d}{dt}\left(x - x_2 + a_2 \sin\theta\right)\right]^3 \quad (٨)$$

در روابط فوق $F_{k_{sf}}$ و $F_{k_{sr}}$ به ترتیب نیروی ایجادشده در فنر سیستم تعلیق جلو و عقب خودرو و $F_{c_{sf}}$ و $F_{c_{sr}}$ به ترتیب بیان‌گر نیروی ناشی از میرایی سیستم تعلیق جلو و عقب خودرو است. a_1 و a_2 به ترتیب بیان‌گر فاصله مرکز جرم خودرو از محور چرخ جلو و عقب می‌باشد.

برای خودرو، همانند مدل یک‌چهارم، سطح جاده به‌عنوان عامل تحریک شناخته می‌شود در این تحقیق تحریک ناشی از جاده به‌صورت سینوسی در نظر گرفته شده است:

$$y_1 = A\sin\Omega t \quad (٩)$$

$$y_2 = A\sin(\Omega t + \beta) \quad (١٠)$$

در روابط فوق A دامنه ناهمواری سطح جاده و $\Omega=2\pi v_0/\lambda$ فرکانس تحریک جاده است که در آن v_0 سرعت حرکت خودرو و λ طول موج می‌باشد. هم‌چنین در رابطه‌ی (۱۰) β بیان‌گر تأخیر زمانی در تحریک چرخ جلو و عقب است.

با در نظر گرفتن مدل ارائه‌شده در شکل (۱) و اجزای معرفی‌شده‌ی سیستم تعلیق، معادلات حرکت سیستم به‌صورت زیر استخراج می‌شود:

بدنه‌ی خودرو:

$$m\ddot{x} = -F_{k_{sf}} - F_{c_{sf}} - F_{k_{sr}} - F_{c_{sr}} - mg \quad \text{(۱۱– الف)}$$

$$I\ddot{\theta} = \left(F_{k_{sf}} + F_{c_{sf}}\right)a_1 \cos\theta - \left(F_{k_{sr}} + F_{c_{sr}}\right)a_2 \cos\theta \quad \text{(۱۱– ب)}$$

چرخ جلو:

$$m_1\ddot{x}_1 = F_{k_{sf}} + F_{c_{sf}} - F_{k_{usf}} - m_1 g \quad \text{(۱۱– ج)}$$

چرخ عقب:

$$m_2\ddot{x}_2 = F_{k_{sr}} + F_{c_{sr}} - F_{k_{usr}} - m_2 g \quad \text{(۱۱– د)}$$

برای فراهم ساختن امکان مقایسه‌ی نتایج حاصل از تحقیق حاضر با نتایج ارائه‌شده در مراجع [16-19] مشخصات سیستم تعلیق با مشخصات ارائه‌شده در مراجع مذکور یکسان در نظر گرفته شده است (جدول ۱). نظر به این که در مراجع مذکور از مدل یک‌چهارم خودرو استفاده شده است در حالی که در تحقیق حاضر مدل بهبودیافته نصف خودرو به‌کار رفته است لذا مقادیر مربوط به جرم و ممان اینرسی بدنه از مرجع [23] و مقادیر ثابت‌ها مربوط به سفتی تایر از مرجع [20] انتخاب شده‌اند که این مقادیر نیز در جدول (۱) آورده شده است.

جدول ۱ مقادیر عددی پارامترهای سیستم تعلیق

780 kg	جرم بدنه	m
980 kg/m^2	ممان اینرسی بدنه	I_z
40 kg	جرم چرخ جلو	m_1
40 kg	جرم چرخ عقب	m_2
900 KN/m	سفتی تایر جلو	k_{usf}
800 KN/m	سفتی تایر عقب	k_{usr}
0.1	مقدار ثابت کوچک	ε
200 KN/m	سفتی فنر سیستم تعلیق جلو	k_{sf}
200 KN/m	سفتی فنر سیستم تعلیق عقب	k_{sr}
250 N.s/m	ثابت میرائی جلو	c_{sf}
250 N.s/m	ثابت میرائی عقب	c_{sr}
1.2 m	فاصله‌ی مرکز جرم از محور چرخ جلو	a_1
1.3 m	فاصله‌ی مرکز جرم از محور چرخ عقب	a_2

برای استخراج پاسخ فرکانسی، از روش عددی رانگ-کوتای مرتبه‌ی ٤ استفاده شده و خطای مطلق در انجام محاسبات 10^{-6} در نظر گرفته شده است. برای استفاده از الگوریتم رانگ-کوتا، ابتدا باید معادلات حاکم بر سیستم در فضای حالت بیان شوند (معادلات ۱۲– الف تا ۱۲– ل):

$$z_1 = x \quad \text{(۱۲– الف)}$$

$$\frac{d}{dt}z_1 = z_2 \quad \text{(۱۲– ب)}$$

$$\frac{d}{dt}z_2 = \left\{-F_{k_{sf}} - F_{c_{sf}} - F_{k_{sr}} - F_{c_{sr}} - mg\right\}/m \quad \text{(۱۲– ج)}$$

$$z_3 = \theta \quad \text{(۱۲– د)}$$

$$\frac{d}{dt}z_3 = z_4 \quad \text{(۱۲– ه)}$$

$$\frac{d}{dt}z_4 = \left\{\left(F_{k_{sf}} + F_{c_{sf}}\right)a_1\cos\theta - \left(F_{k_{sr}} + F_{c_{sr}}\right)a_2\cos\theta\right\}/I \quad \text{(۱۲– و)}$$

$$z_5 = x_1 \quad \text{(۱۲– ز)}$$

$$\frac{d}{dt}z_5 = z_6 \qquad (۱۲-ح)$$

$$\frac{d}{dt}z_6 = \left\{F_{k_{sf}} + F_{c_{sf}} - F_{k_{usf}} - m_1 g\right\}/m_1 \qquad (۱۲-ط)$$

$$z_7 = x_2 \qquad (۱۲-ی)$$

$$\frac{d}{dt}z_7 = z_8 \qquad (۱۲-ک)$$

$$\frac{d}{dt}z_8 = \left\{F_{k_{sr}} + F_{c_{sr}} - F_{k_{usr}} - m_2 g\right\}/m_2 \qquad (۱۲-ل)$$

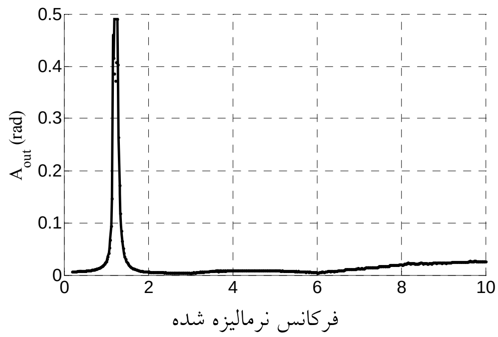
تحلیل مدل

در تحلیل دینامیکی سیستم به‌طور معمول از پاسخ فرکانسی استفاده می‌شود و نمودارهای چندگانگی و پوآنکاره برای تایید پاسخ آشوبناک به‌کار برده می‌شود [24]. زمانی که فرکانس تحریک در ناحیه‌ی ناپایدار پاسخ فرکانسی قرار دارد پاسخ آشوبناک سیستم بسیار محتمل است. ازاین‌رو، می‌توان از مطالعه‌ی ناحیه‌ی ناپایدار نمودار پاسخ فرکانسی برای پیش‌بینی رفتار آشوبناک استفاده کرد [25]. برای مدل خودرو نمودارهای پاسخ فرکانسی به‌صورت تغییرات چهار پارامتر x_G، θ، x_1 و x_2 به‌عنوان دامنه‌ی نوسانات (A_{out}) در برابر فرکانس تحریک جاده رسم می‌شود:

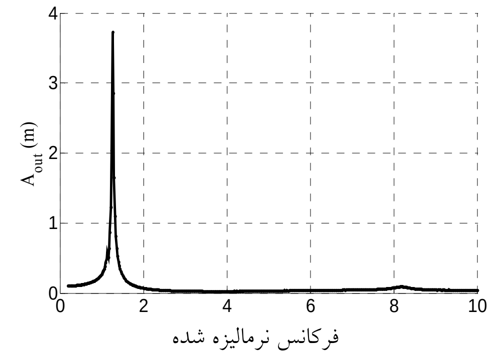
$$A_{out} = \left|\frac{q_{max} - q_{min}}{2}\right| \qquad (۱۳)$$

در رابطه‌ی بالا q_{max} و q_{min} به ترتیب بیان‌گر ماکزیمم و مینیمم دامنه‌ی نوسانات هر یک از چهار پارامتر x_G، θ، x_1 و x_2 به‌عنوان پاسخ پایدار سیستم است.

برای دست‌یابی به دید کافی از سیستم، در ابتدا منحنی‌های پاسخ فرکانسی برای سیستم خطی متناظر با صفر فرض کردن جملات غیر خطی رسم شده است. در شکل (۲- الف و ب) پاسخ فرکانسی به ترتیب برای حرکت کله‌زنی بدنه و حرکت عمودی بدنه بر اساس مقادیر ارائه‌شده در جدول (۱) رسم شده است. در شکل‌های اخیر، دامنه‌ی ناهمواری جاده مطابق با مرجع [8]، ۰/۱۱ متر در نظر گرفته شده است. در منحنی‌های ارائه‌شده برای پاسخ فرکانسی، فرکانس تحریک نسبت به $\omega = \sqrt{K_{sf}/m_s}$ بی‌بعد شده است که به آن فرکانس تحریک نرمالیزه شده ($\bar{f}$) می‌گوییم. منحنی‌های پاسخ فرکانسی برای حالت کاهش فرکانس تحریک از حداکثر مقدار تا مقدار صفر استخراج شده است. گام کاهش فرکانس تحریک نرمالیزه‌شده برابر ۰/۰۰۱ در نظر گرفته شده است و برای دست‌یابی به پاسخ حالت ماندگار، زمان ارتعاش در هر فرکانس تحریک ۵۰ برابر زمان تناوب در سیستم خطی متناظر در نظر گرفته شده است.



(الف)

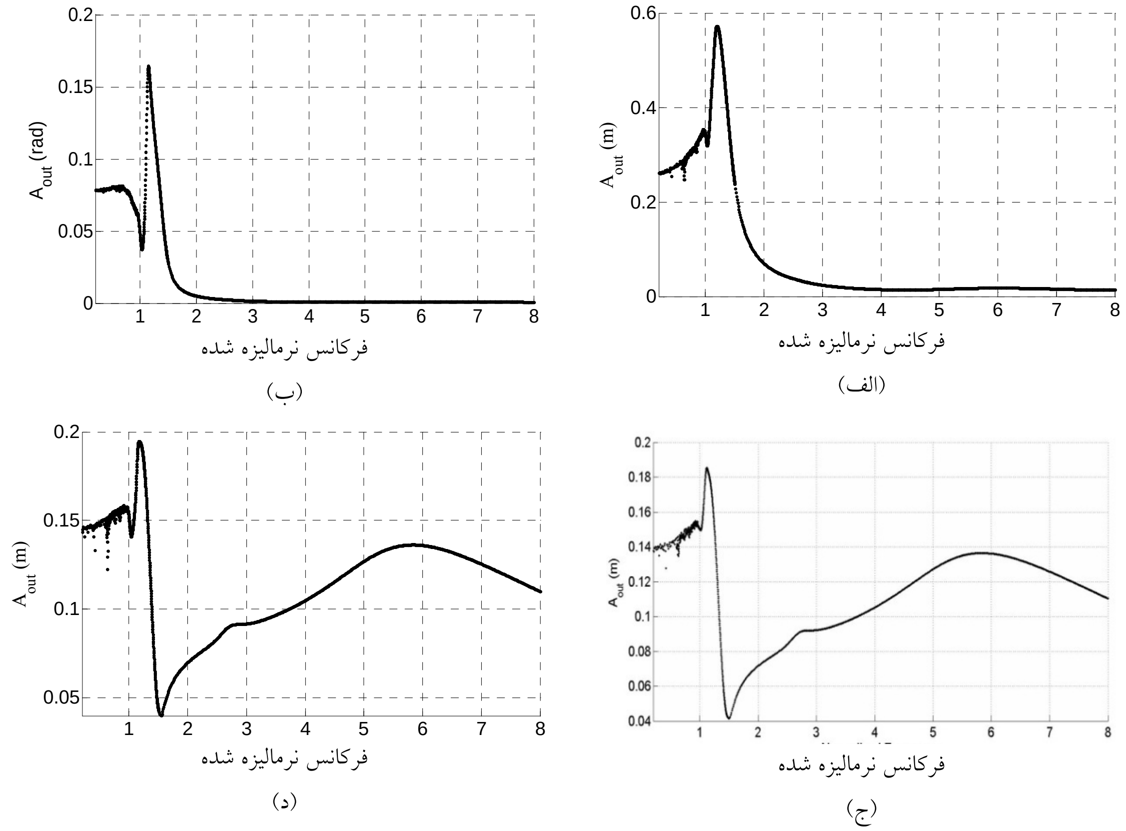


(ب)

شکل ۲ پاسخ فرکانسی مدل خطی نصف خودرو تحت تحریک جاده (الف. برای حرکت کله‌زنی بدنه، ب. برای حرکت عمودی بدنه)

همچنان که در شکل‌های (۲- الف و ب) دیده می‌شود پیک‌های متناظر با فرکانس‌های طبیعی حرکت عمودی بدنه و حرکت کله‌زنی بدنه در سیستم خطی متناظر به ترتیب در $\bar{f}=1.26$ و $\bar{f}=1.20$ ظاهر می‌شود که مطابق با نتایج حل تحلیلی است. نزدیکی این دو پیک به یکدیگر، حاکی از وجود رفتارهای ویژه در این ناحیه است که در بررسی پاسخ سیستم این نکته مد نظر قرار گرفته است.

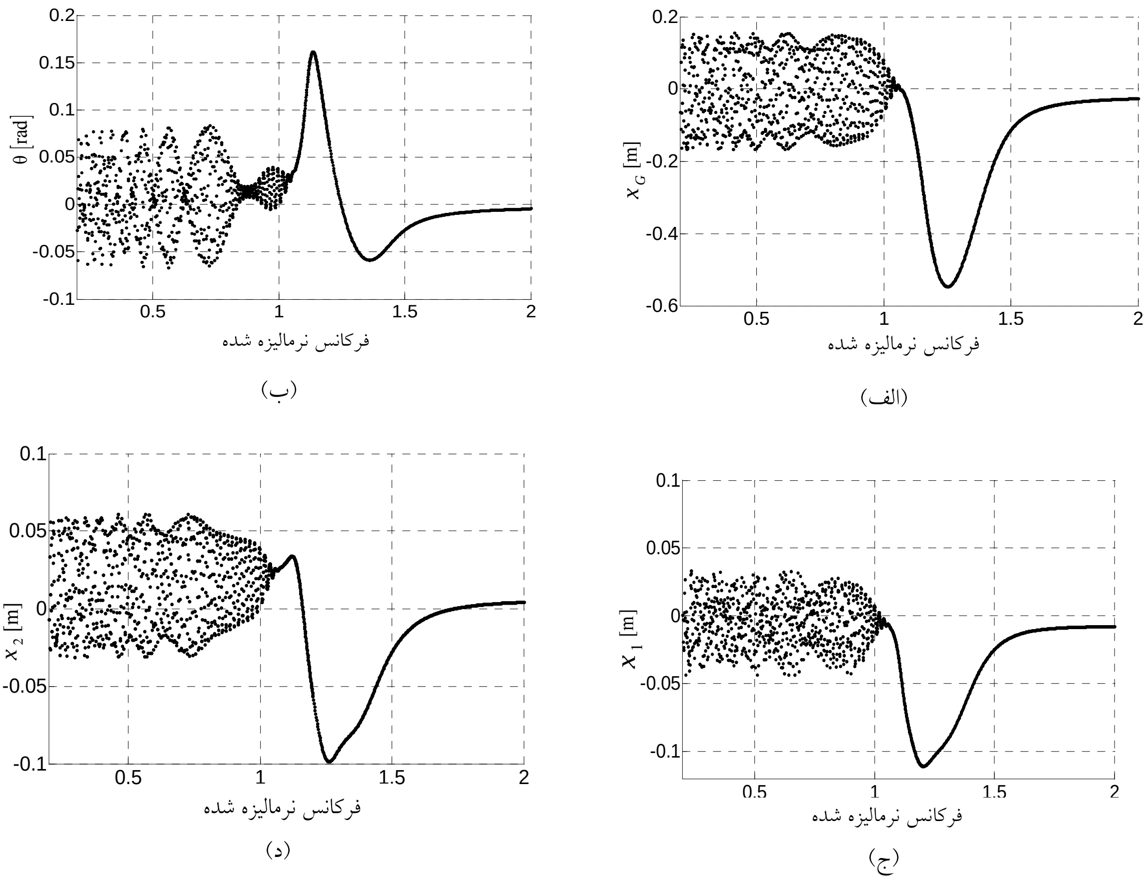
در ادامه با در نظر گرفتن اثرات غیرخطی اجزای تشکیل‌دهنده‌ی سیستم تعلیق خودرو به بررسی نحوه‌ی تغییر رزونانس‌های اصلی، نسبت به مدل خطی‌سازی‌شده پرداخته می‌شود. برای این منظور، به بررسی اثرات غیرخطی پارامترهای سیستم تعلیق (α و η) بر پاسخ سیستم پرداخته شده است. پاسخ سیستم به‌ازای مقادیر متفاوتی از α و η مورد بررسی قرار گرفت و از بین حالات مختلف، دو دسته حالت حدی مشابه سیستم یک‌چهارم خودرو انتخاب شد. در حالت اول ($\alpha=0.3$ و $\eta=0.08$) میرایی غیرخطی نسبت به حالت دوم ($\alpha=1.2$ و $\eta=0.02$)، از شدت بیش‌تری برخوردار است. برای این که تفاوت‌ها به شکل محسوس‌تری قابل مشاهده باشد هم‌زمان با کاهش اثربخش غیرخطی میرایی (η)، برای بخش غیرخطی سفتی سیستم تعلیق (α) از مقادیر بزرگ‌تری استفاده شده است. در نهایت مقایسه‌ای بین مدل نصف خودرو با چهار درجه آزادی و مدل یک‌چهارم خودرو با دو درجه آزادی انجام شده است.



شکل ۳ پاسخ فرکانسی برای مدل غیرخطی به ازای $\alpha=0.3$ و $\eta=0.08$ (الف. برای حرکت عمودی بدنه، ب. برای حرکت کله‌زنی ج) برای حرکت عمودی چرخ جلو، د. برای حرکت عمودی چرخ عقب)

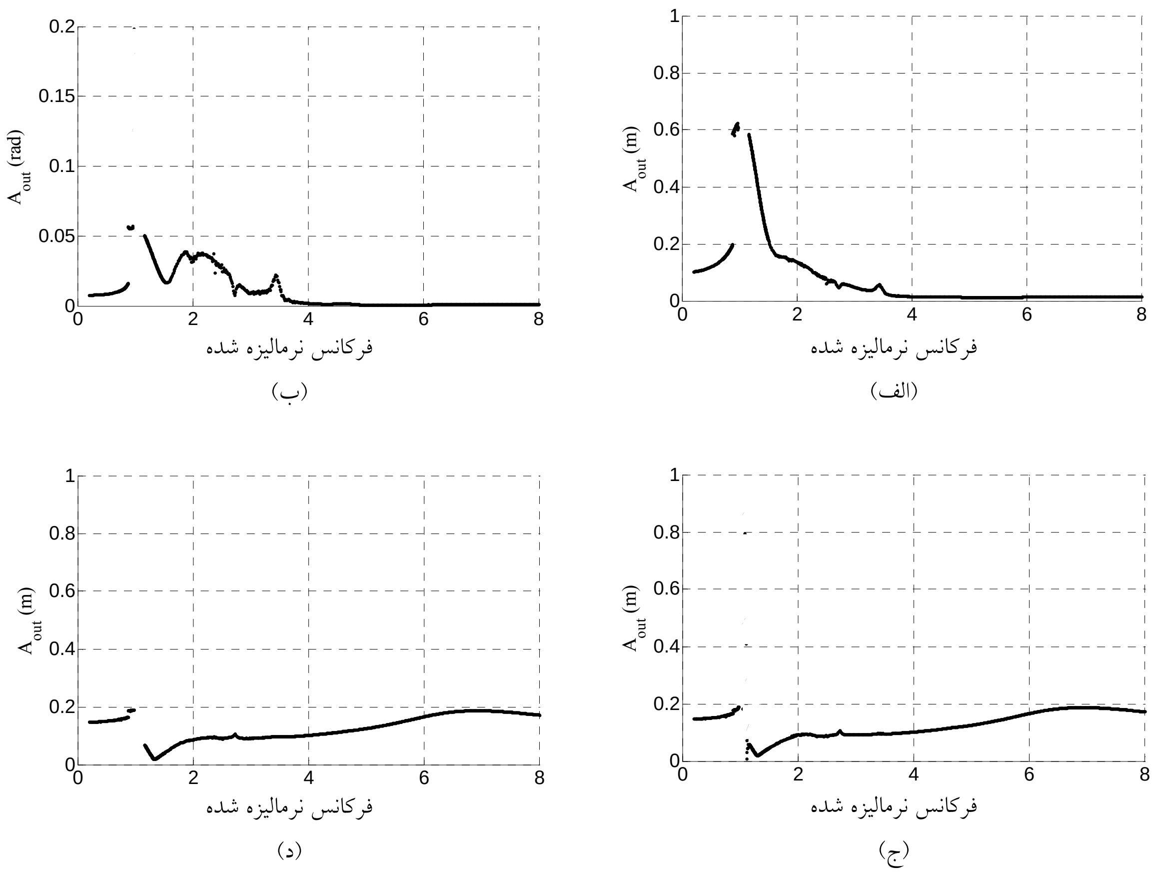
بررسی تأثیر اجزای غیرخطی بر پاسخ سیستم. در شکل (۳- الف تا د) با فرض $\alpha = 0.3$ و $\eta = 0.08$ نمودارهای مربوط به پاسخ فرکانسی سیستم به ترتیب برای حرکت عمودی بدنه، حرکت کله‌زنی بدنه، حرکت عمودی چرخ جلو و حرکت عمودی چرخ عقب خودرو آورده شده است. رزونانس‌های اصلی در فرکانس‌های تحریک $\bar{f} = 1.20$ برای حرکت عمودی بدنه، $\bar{f} = 1.14$ برای حرکت کله‌زنی بدنه، $\bar{f} = 5.85$ برای چرخ جلو و $\bar{f} = 5.81$ برای چرخ عقب خودرو مشاهده می‌شود. رزونانس اصلی حرکت عمودی و کله‌زنی بدنه‌ی خودرو در فرکانس‌های نزدیک یکدیگر روی می‌دهد. هم‌چنین پس از رزونانس اصلی حرکت کله‌زنی، سقوطی ناگهانی در پاسخ دیده می‌شود که احتمال تغییر در نوع حرکت وجود دارد. برای بررسی بیش‌تر این پدیده، نمودار چندگانگی سیستم در ناحیه‌ی مذکور رسم شد (شکل ٤- الف تا د). در نمودار چندگانگی مربوط به حرکت کله‌زنی مشاهده می‌شود که فرکانس متناظر با فرکانس سقوط در پاسخ فرکانسی حرکت کله‌زنی، محل گذار از پاسخ آرام به پاسخ آشوبناک می‌باشد. این گذار در پاسخ برای سایر درجات آزادی در فرکانس‌های کوچک‌تر اما نزدیک به فرکانس حرکت کله‌زنی مشاهده می‌شود.

از مقایسه‌ی نتایج به‌دست‌آمده با نتایج ذکرشده در پژوهش‌های دیگران برای مدل یک‌چهارم یک درجه آزادی می‌توان به این نتیجه رسید که گذار در پاسخ حرکت کله‌زنی، تغییر در نوع حرکت سایر درجات آزادی را تسریع نموده است. در نتیجه، خودرو در فرکانس‌های تحریک بالاتری نسبت به مدل یک‌چهارم از خود پاسخ آشوبناک نشان می‌دهد.

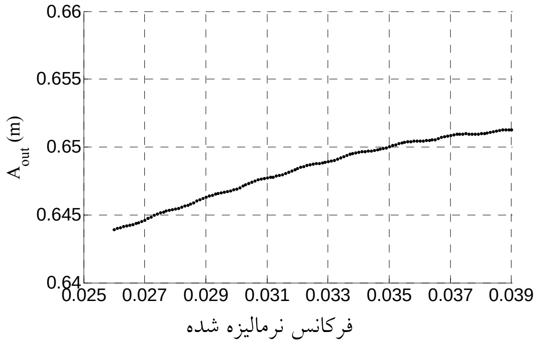


شکل ٤ نمودارهای چندگانگی برای مدل غیرخطی به ازای $\alpha = 0.3$ و $\eta = 0.08$ (الف. برای حرکت عمودی بدنه، ب. برای حرکت کله‌زنی، ج. برای حرکت عمودی چرخ جلو، د. برای حرکت عمودی چرخ عقب)

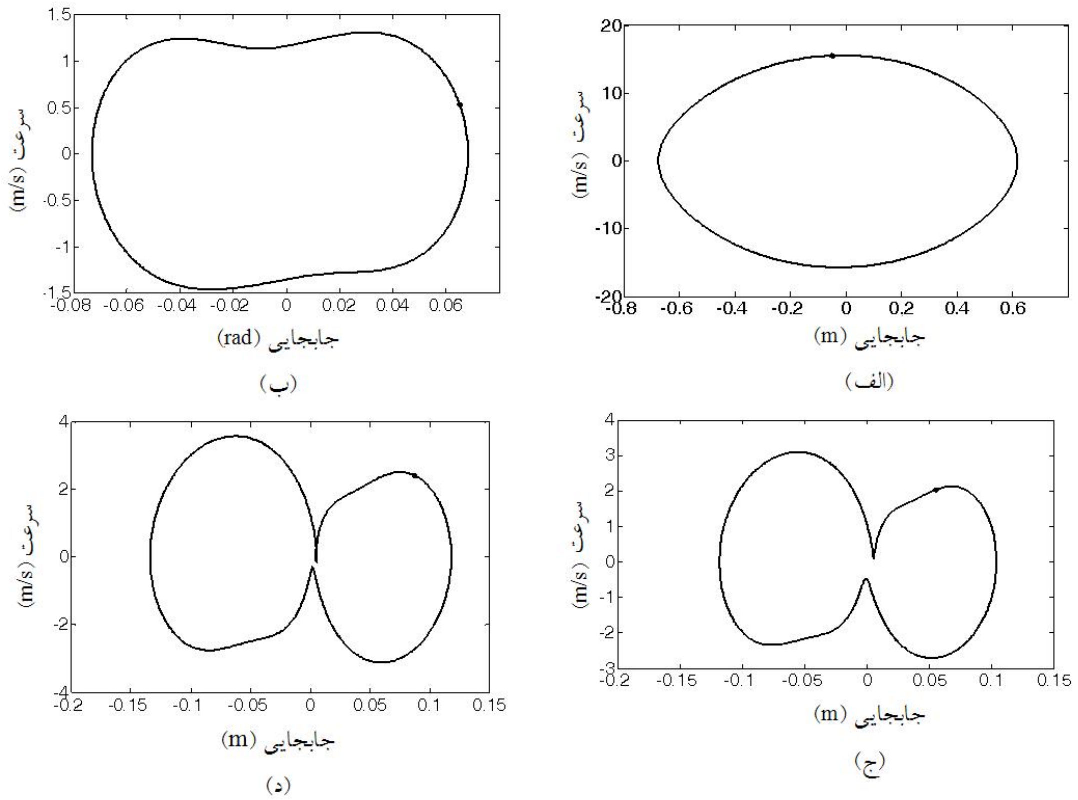
در شکل (۵–الف تا د) نمودارهای مربوط به پاسخ فرکانسی به ترتیب برای حرکت عمودی بدنه، حرکت کله‌زنی، حرکت عمودی چرخ جلو و حرکت عمودی چرخ عقب خودرو به ازای $\alpha = 1.2$ و $\eta = 0.02$ آورده شده است. در این حالت در مقایسه با حالت پیشین، میزان غیرخطی بودن میرایی سیستم کاهش یافته است و دو ناحیه‌ی ناپایدار در پاسخ مشاهده می‌شود. اولین ناحیه‌ی ناپایدار در فرکانسی نزدیک به رزونانس اصلی حرکت عمودی بدنه‌ی خودرو ($\bar{f} = 1.20$) روی می‌دهد. دومین ناحیه‌ی ناپایدار در فرکانسی نزدیک به رزونانس اصلی حرکت کله‌زنی بدنه‌ی خودرو ($\bar{f} = 1.10$) روی می‌دهد. با مقایسه‌ی نمودار حاضر با نمودارهای به‌دست‌آمده برای مدل یک‌چهارم خودرو در شرایط مشابه مشاهده می‌شود که برای سیستم یک‌چهارم در حوالی رزونانس اصلی جرم فنربندی‌شده (بدنه)، پاسخ سیستم از نوع ضربانی میرا می‌باشد در حالی که برای مدل حاضر بر هم کنش دو رزونانس اصلی سبب به وجود آمدن دو ناحیه‌ی ناپایدار در پاسخ سیستم شده است. برای چرخ جلو (شکل ۵– ج)، این دو ناحیه‌ی ناپایدار ترکیب شده و تشکیل یک ناحیه بزرگ‌تر ناپایدار را داده‌اند.



شکل ۵ پاسخ فرکانسی برای مدل غیرخطی به ازای $\alpha = 1.2$ و $\eta = 0.02$ (الف. برای حرکت عمودی بدنه، ب. برای حرکت کله‌زنی بدنه، ج. برای حرکت عمودی چرخ جلو د. برای حرکت عمودی چرخ عقب)



شکل ٦ نمودار تغییرات دامنه‌ی خروجی در برابر تغییرات ضریب میرایی به ازای $\overline{f}=1.1$ و $\alpha=1.2$



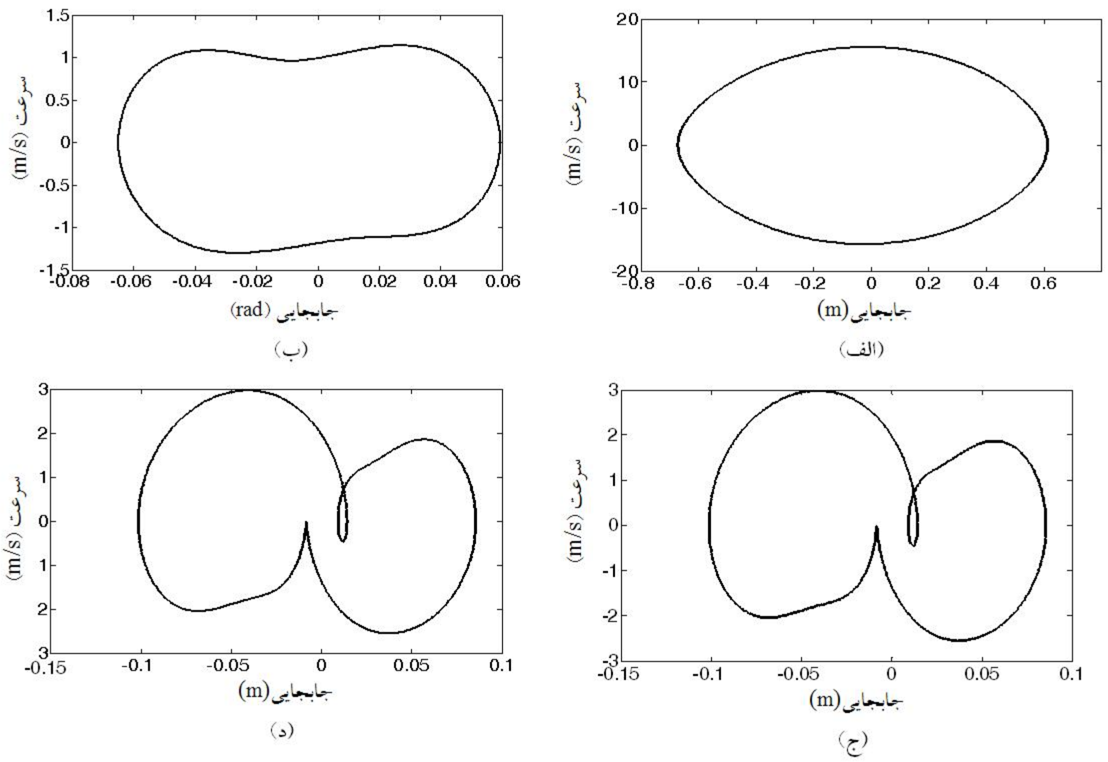
شکل ۷ پیکره‌ی فاز سیستم در فرکانس تحریک $\overline{f}=1.10$ به ازای $\alpha=1.20$ و $\eta=0.028$ (الف. برای حرکت عمودی بدنه، ب. برای حرکت کله‌زنی بدنه، ج. برای حرکت عمودی چرخ جلو د) برای حرکت عمودی چرخ عقب)

با توجه به وجود نواحی ناپایدار در پاسخ فرکانسی، تأثیر میرایی بر رفتار سیستم در نواحی ناپایدار با دقت بیش‌تری بررسی شد. در شکل (٦) نمودار تغییرات دامنه‌ی خروجی حرکت عمودی بدنه در فرکانس تحریک $\overline{f}=1.1$ و به‌ازای $\alpha=1.2$ برای کاهش میرایی (η) آورده شده است. مشاهده می‌شود که به‌ازای مقادیر $\eta<0.026$ پاسخ اجباری سیستم ناپایدار می‌شود و پاسخی برای سیستم یافت نمی‌شود. از ضریب میرائی $\eta=0.026$ که متناظر با پرش از پاسخ پایدار به پاسخ ناپایدار است به‌عنوان ضریب میرایی بحرانی (η_{cr}) یاد می‌کنیم. بررسی‌های بیش‌تر نشان داد که برای ضریب میرایی کم‌تر از η_{cr} پاسخ سیستم

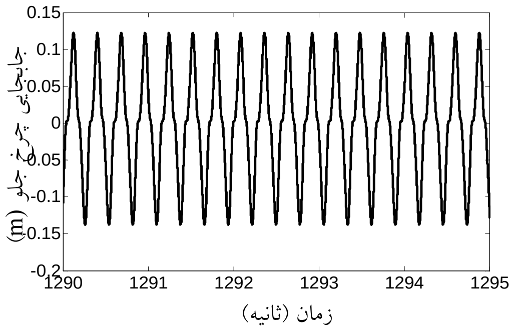
به‌شدت به شرایط اولیه حساس است و دو دسته پاسخ مرزی وجود دارد که با کوچک‌ترین تحریکی، پاسخ سیستم ناپایدار می‌شود. برای بررسی بیش‌تر پدیده، ابتدا پاسخ سیستم در فرکانس تحریک $\bar{f}=1.10$ به‌ازای $\eta=0.028$ استخراج شد سپس مقدار ضریب میرایی با آرامی کاهش داده شد تا از مرز ضریب میرایی بحرانی عبور کند.

در شکل (۷–الف تا د) نمودارهای پیکره‌ی فاز سیستم به‌ازای $\bar{f}=1.10$ و $\eta=0.028$ آورده شده است. در این نمودارها، پاسخ حرکت عمودی و کله‌زنی بدنه یک حلقه‌ی بسته است که بیان‌گر حرکتی پریودیک است. در نمودار پاسخ عمودی چرخ‌ها، تیزی در پاسخ دیده می‌شود. با کاهش ضریب میرایی و گذر از مقدار بحرانی، رفتار سیستم دچار تغییر زیادی می‌شود. ناحیه‌ی مذکور در پاسخ فرکانسی در نزدیکی رزونانس‌های اصلی حرکت عمودی و کله‌زنی بدنه‌ی خودرو قرار دارد. تصور بر این بود که حرکت ناپایدار، از حرکتی آغاز می‌شود که در نزدیکی رزونانس اصلی خود قرار دارد. اما نتایج نشان داد که این نوع حرکت از حرکت عمودی چرخ‌ها آغاز می‌شود.

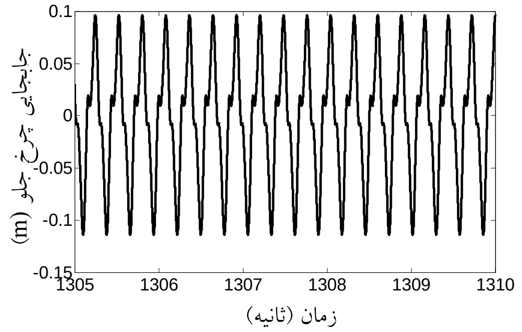
اگر به نمودار پوآنکاره‌ی سیستم در فرکانس تحریک $\bar{f}=1.1$ و ضریب میرایی $\eta=0.024$ مراجعه شود (شکل ۸–الف تا د) مشاهده می‌شود که در نمودار مربوط به چرخ جلو و عقب یک پیچش در پاسخ وجود دارد این چند حلقه شدن، وجود پاسخ ناپایدار را برای سیستم تایید می‌کند. با مراجعه به شکل (۹– الف و ب)، که به ترتیب مربوط به پاسخ زمانی چرخ جلو برای ضریب میرایی $\eta=0.028$ و $\eta=0.024$ است رفتار ناپایدار برای حالت دوم در پاسخ مشهود است



شکل ۸ پیکره‌ی فاز برای مدل غیرخطی در فرکانس تحریک $\bar{f}=1.10$ و به ازای $\alpha=1.5$ و $\eta=0.024$ (الف. برای حرکت عمودی بدنه، ب. برای حرکت کله‌زنی بدنه، ج. برای چرخ جلو، د. برای چرخ عقب)



(الف)

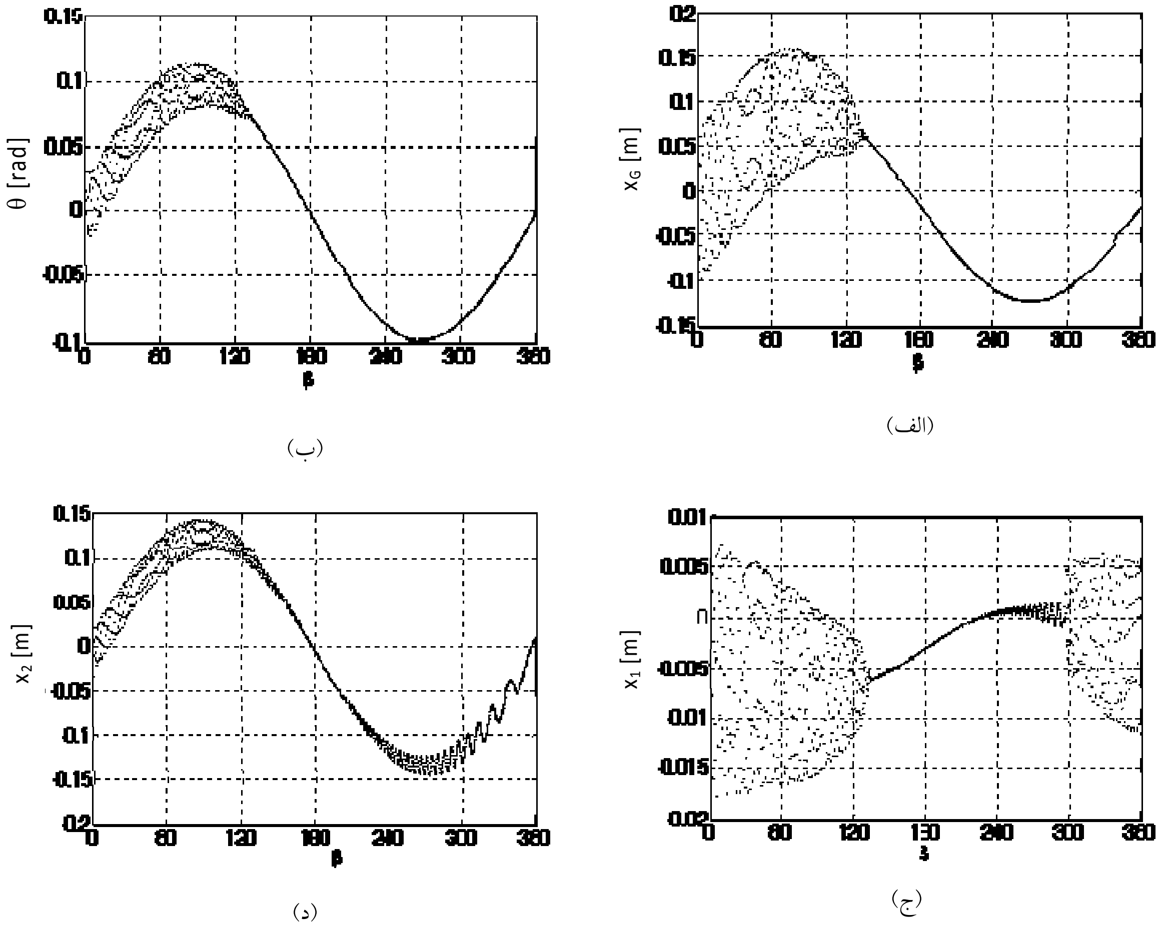


(ب)

شکل ۹ پاسخ زمانی سیستم در فرکانس تحریک $\bar{f} = 1.10$ (الف. به ازای $\eta = 0.028$، ب. به ازای $\eta = 0.024$)

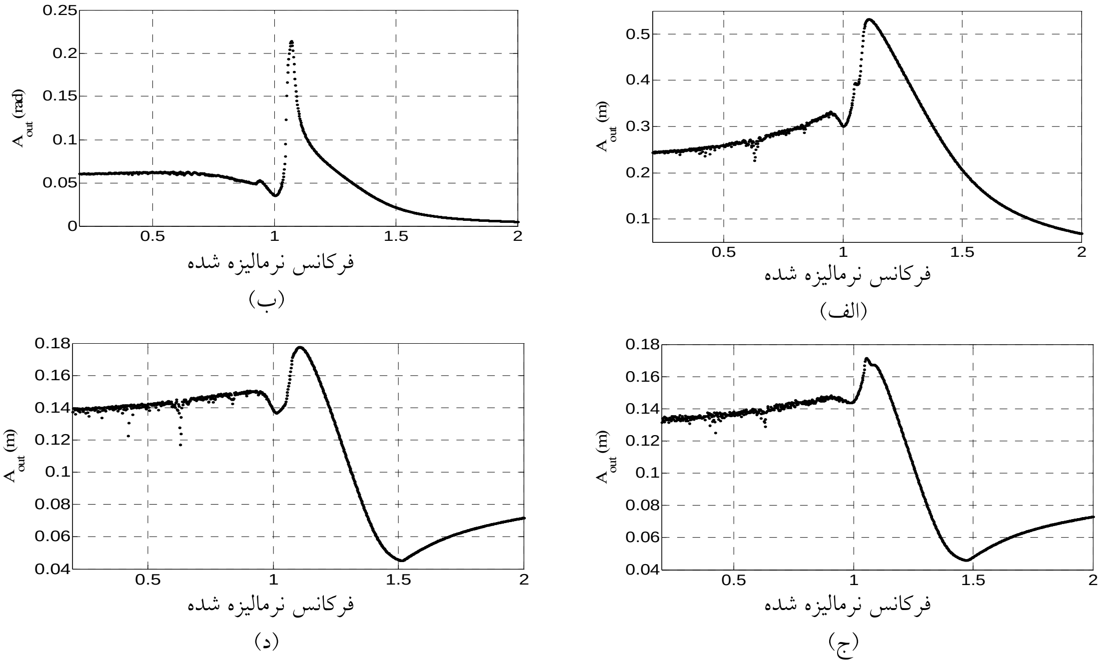
بررسی تأثیر تأخیر زمانی بر رفتار آشوبناک سیستم تعلیق. یکی دیگر از پارامترهای تأثیرگذار بر رفتار دینامیکی خودرو، تأخیر زمانی بین دو محور خودرو است. در تحقیقات قبلی که صرفاً از مدل‌های یک‌چهارم خودرو برای بررسی رفتار دینامیکی و آشوبناک سیستم تعلیق استفاده شده است امکان بررسی تأثیر تأخیر زمانی وجود ندارد. تأخیر زمانی در عمل وابسته به سرعت خودرو، طول موج پروفیل جاده و فاصله‌ی محور به محور خودرو است. در شکل (۱۰- الف تا د) نمودارهای چندگانگی سیستم تعلیق در فرکانس تحریک $\bar{f} = 0.95$ و به‌ازای $\alpha = 1.50$ و $\eta = 0.10$ به ترتیب برای حرکت عمودی بدنه، حرکت کله‌زنی بدنه، حرکت عمودی چرخ جلو و حرکت عمودی چرخ عقب آورده شده است. برای حرکت عمودی و کله‌زنی بدنه در این نمودارها یک ناحیه با پاسخ آشوبناک وجود دارد ($0 < \beta < 135$) در حالی که برای حرکت عمودی چرخ جلو و عقب دو ناحیه‌ی ناپایدار موجود می‌باشد. در این دو ناحیه رفتار چرخ‌ها نسبت به یکدیگر متفاوت است. در بازه‌ی $0 < \beta < 135$ هر دو چرخ رفتاری آشوبناک از خود نشان می‌دهند اما در بازه‌ی $240 < \beta < 360$، چرخ جلو ابتدا رفتار ضربانی (Beating) از خود نشان می‌دهد که با یک جهش در $\beta = 300^0$ رفتار آن آشوبناک می‌شود ولی چرخ عقب رفتار ضربانی خود را در این ناحیه حفظ می‌کند.

بررسی رفتار دینامیکی خودرو با در نظر گرفتن مدل غیرخطی نصف خودرو و مقایسه‌ی آن با مدل یک‌چهارم خودرو. در این بخش، از مدل نصف خودرو با چهار درجه آزادی برای مطالعه‌ی رفتار دینامیکی خودرو استفاده شده است که مدل توسعه‌یافته مدل یک‌چهارم با دو درجه آزادی ارائه‌شده در [16-19] است. وجود رفتارهای خاص در پاسخ اجباری سیستم نسبت به مدل پیشین، سبب پررنگ‌تر شدن اهمیت درجات آزادی دیگر در پاسخ خودرو شده است. نمودارهای پاسخ فرکانسی سیستم در شکل (۱۱- الف تا د) به ترتیب برای حرکت عمودی بدنه، حرکت کله‌زنی بدنه، حرکت عمودی چرخ جلو و حرکت عمودی چرخ عقب خودرو آورده شده است. به‌علت اهمیت رفتار سیستم در بازه‌ی فرکانسی $0.2 < \bar{f} < 2$ ، تنها این ناحیه از بازه‌ی فرکانسی در شکل آورده شده است. برای سیستم نصف خودرو، چهار رزونانس اصلی در فرکانس تحریک $\bar{f} = 1.20$ برای حرکت عمودی بدنه، $\bar{f} = 1.16$ برای حرکت کله‌زنی بدنه، $\bar{f} = 5.7$ برای حرکت عمودی چرخ جلو و $\bar{f} = 5.75$ برای حرکت عمودی چرخ عقب مشاهده می‌شود.

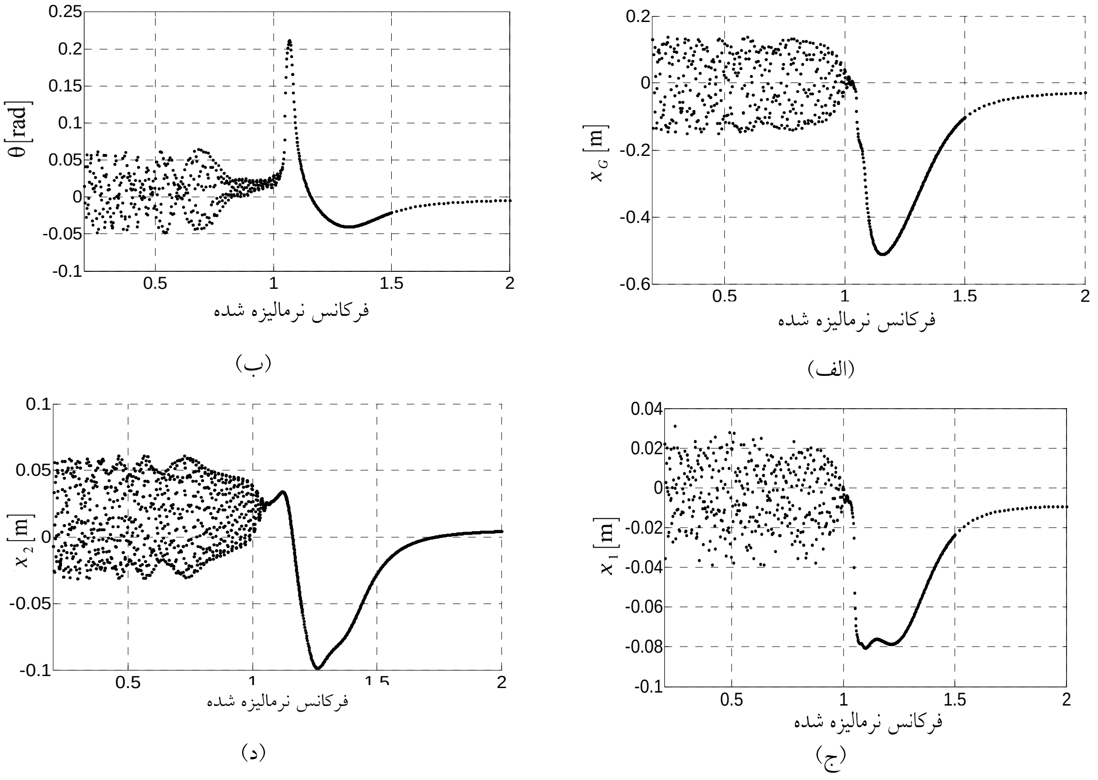


شکل ۱۰ نمودارهای چندگانگی تأخیر زمانی در فرکانس تحریک $\bar{f}=0.95$ برای مدل غیر خطی به‌ازای $\alpha=1.5$ و $\eta=0.10$ (الف. برای حرکت عمودی بدنه، ب. برای حرکت کله‌زنی، ج. برای حرکت عمودی چرخ جلو، د. برای حرکت عمودی چرخ عقب)

نزدیکی دو رزونانس اصلی حرکت عمودی بدنه و حرکت کله‌زنی بدنه سبب بروز رفتارهای ویژه‌ای در این ناحیه شده است. برای حرکت عمودی بدنه در شکل (۱۱- الف) مشاهده می‌شود که بعد از پیک اصلی یک سقوط در دامنه وجود دارد اما نزدیکی محل این سقوط با رزونانس اصلی حرکت کله‌زنی سبب ایجاد وقفه در سقوط و ایجاد پیکی دیگر اما کوچک‌تر در پاسخ اجباری سیستم در این ناحیه شده است که این پدیده در مدل یک‌چهارم مشاهده نمی‌شود. برای بررسی به‌تر رفتار مذکور، نمودارهای چندگانگی سیستم به ترتیب برای حرکت عمودی بدنه، حرکت کله‌زنی بدنه، حرکت عمودی چرخ جلو و حرکت عمودی چرخ عقب خودرو در شکل (۱۲- الف تا د) آورده شده است. در این نمودارها روشن است پیک دوم موجود در پاسخ فرکانسی حرکت عمودی ($\bar{f}=1.16$) محل تغییر در نوع پاسخ سیستم است. پاسخ آشوبناک در این ناحیه از حرکت کله‌زنی آغاز می‌شود (شکل ۱۱- ب). این رفتار به حرکت عمودی بدنه نیز انتقال می‌یابد و باعث تغییر در نوع حرکت آن می‌شود. قابل ذکر است که در مدل یک‌چهارم، محل گذار پاسخ، مینیمم موجود در نمودار پاسخ فرکانسی ($\bar{f}=1.00$) بود که در این حالت به علت تأثیر حرکت کله‌زنی محل آن تغییر یافته است.



شکل ۱۱ پاسخ فرکانسی برای مدل غیرخطی به ازای $\alpha = 1.50$ و $\eta = 0.10$ (الف. برای حرکت عمودی بدنه، ب. برای حرکت کله‌زنی بدنه، ج. برای حرکت عمودی چرخ جلو، د. برای حرکت عمودی چرخ عقب)



شکل ۱۲ نمودارهای چندگانگی برای مدل غیرخطی به ازای $\alpha = 1.50$ و $\eta = 0.10$ (الف. برای حرکت عمودی بدنه، ب. برای حرکت کله‌زنی، ج. برای حرکت عمودی چرخ جلو، د. برای حرکت عمودی چرخ عقب)

برای سیستم مورد نظر مشاهده شد که علاوه بر فرکانس تحریک، شرایط اولیه نیز بر پاسخ اجباری سیستم تأثیرگذار است.

نتیجه‌گیری

در بیش‌تر تحقیقات انجام‌شده به‌منظور بررسی رفتار دینامیک غیرخطی در خودرو، از مدل یک‌چهارم خودرو استفاده شده است. استفاده از مدل مذکور و در نظر نگرفتن درجه آزادی مربوط به حرکت کله‌زنی خودرو، سبب ایجاد نقیصه در شناسایی رفتار واقعی سیستم تعلیق تحت پاسخ اجباری سیستم می‌شود.

در این مقاله مدل غیرخطی نصف خودرو با چهار درجه آزادی بر اساس مدل‌های جدید ارائه‌شده برای المان‌های غیرخطی سیستم تعلیق مورد بررسی قرار گرفت. پاسخ فرکانسی سیستم استخراج شد و از نمودارهای چندگانگی و پوآنکاره به‌منظور بررسی پاسخ سیستم در نواحی ناپایدار پاسخ فرکانسی استفاده شد. نتایج نشان داد که به‌علت نزدیکی رزونانس اصلی حرکت کله‌زنی بدنه به رزونانس اصلی حرکت عمودی بدنه، پاسخ اجباری سیستم دچار تغییرات عمده‌ای می‌شود. هم‌چنین مشاهده شد که برهم کنش این دو رزونانس اصلی، سبب تغییر در محل گذار پاسخ سیستم از پاسخ آرام به پاسخ آشوبناک می‌شود. به طوری که در فرکانس تحریک $\overline{f}=1.16$ پاسخ آشوبناک از حرکت کله‌زنی شروع می‌شود و به حرکات دیگر انتقال می‌یابد در حالی که در مدل یک‌چهارم حرکت آشوبناک از حرکت چرخ آغاز می‌شود و به حرکت جرم فنربندی‌شده انتقال می‌یابد.

بررسی پارامترهای سیستم تعلیق(میرایی و سفتی) نشان داد که با کاهش میرایی سیستم تعلیق، در مقایسه با مدل یک‌چهارم، دو ناحیه‌ی ناپایدار جدید در پاسخ فرکانسی سیستم تشکیل می‌شود. این دو ناحیه در فرکانس‌های تحریک متناظر با رزونانس‌های اصلی حرکت عمودی و کله‌زنی بدنه به‌وجود می‌آیند. قابل ذکر است که در تحقیقات مبتنی بر مدل یک‌چهارم خودرو، در این ناحیه پاسخ ضربانی میرا برای سیستم گزارش شده است. در حالی که در مدل نصف خودرو، نزدیکی دو رزونانس اصلی سبب تشدید پاسخ و ایجاد نواحی ناپایدار مذکور می‌شود. هم‌چنین در نمودار پاسخ فرکانسی مربوط به چرخ جلو مشاهده شد که دو ناحیه‌ی مذکور با یکدیگر ترکیب می‌شوند و تشکیل ناحیه‌ی ناپایدار بزرگ‌تری را می‌دهند.

از پارامترهای تأثیرگذار بر پاسخ سیستم که در مدل یک‌چهارم امکان مطالعه‌ی آن وجود نداشت تأخیر زمانی بین عبور دو محور خودرو از ناهمواری است. تأخیر زمانی در عمل وابسته به سرعت خودرو، طول موج پروفیل جاده و فاصله‌ی بین محور به محور خودرو است. نمودارهای چندگانگی سیستم برای تأخیر زمانی در فرکانس تحریک $\overline{f}=0.95$ رسم شد. مشاهده شد که برای حرکت عمودی و کله‌زنی خودرو در بازه‌ی $0<\beta<135$ سیستم دارای حرکت آشوبناک است. برای حرکت عمودی چرخ‌ها علاوه بر ناحیه‌ی مذکور، در بازه‌ی $240<\beta<360$ نیز برای سیستم حرکت ناپایدار مشاهده شد. در جمع‌بندی می‌توان گفت که علاوه بر فرکانس تحریک و شرایط اولیه، مقدار تأخیر زمانی نیز در تعیین نوع پاسخ سیستم دارای اهمیت می‌باشد. با استفاده از مدل یک‌چهارم خودرو، شناسایی چنین رفتاری امکان پذیر نیست.

فهرست نمادها و نشانه‌ها

نشانه‌های انگلیسی

دامنه‌ی ناهمواری جاده	A
دامنه‌ی نوسانات	A_{out}
میرایی تعلیق جلو	c_{sf}
میرایی تعلیق عقب	c_{sr}
نیروی ایجادشده در دمپر سیستم تعلیق	$F_{c_{si}}$
نیروی اعمالی به جرم فنربندی‌شده	$F_{k_{usi}}$
نیروی ایجادشده در فنر سیستم تعلیق	F_{si}

شتاب گرانش	g
ممان اینرسی بدنه (جرم فنربندی‌شده)	I_z
سفتی فنر تعلیق جلو	k_{sf}
سفتی فنر تعلیق عقب	k_{sr}
سفتی تایر جلو	k_{usf}
سفتی تایر عقب	k_{usr}
جرم فنربندی‌شده	m_s
جرم فنربندی‌نشده	m_{us}
سرعت حرکت خودرو	v_0
جابه‌جایی جرم فنربندی شده	x_G
جابه‌جایی جرم فنربندی‌نشده جلو	x_1
جابه‌جایی جرم فنربندی‌نشده عقب	x_2
توابع تحریک پایه	y_1, y_2
متغیرهای حالت	$z_i, i = 1,2,\cdots,8$

نشانه‌های یونانی

ضریب بخش غیرخطی سفتی سیستم تعلیق	α
ضریب بخش غیرخطی سفتی تایر	ε
ضریب بخش غیرخطی میرایی سیستم تعلیق	η
فرکانس تحریک	Ω

مراجع

1. Genta, G., "*Motor Vehicle Dynamics*," 2nd Edition, World Scientific, Singapore, (2003).
2. Takashi, T., "Modeling, Analysis and Control Methods for Improving Vehicle Dynamic Behavior (overview)", *R&D Review of Toyota CRDL*, Vol. 38, pp. 1-9, (2003).
3. Verros, G., Natsiavias, S. and, Stepan, G., "Control and Dynamics of Quarter-car Models with Dual-Rate Damping", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 6, pp. 1045-1063, (2000).
4. Shaopu, Y. and Ahmadian M., "Hopf bifurcation in a railway wheel set with nonlinear damping", *ASME Rail Transport Div*, Vol. 12, pp. 113–120, (1996).
5. Von Wager, U., "On Non-Linear Stochastic Dynamics of Quarter-car Model", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 39, pp. 753-765, (2004).
6. Turkay, S., Natsiavias, S., and Papadimitriou, C., "Design Optimization of Quarter-car Models with Passive and Semi-Active Suspension under Random Road Excitation", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 11, pp. 229-236, (2005).
7. Robson, J.D., "Road Surface Description and Vehicle Response", *International Journal of Vehicle Design*, Vol. 9, pp. 25-35, (1979).
8. Williams, R.A., "Automotive Active Suspension, Part 1: Basic Principles", *Journal of Automotive Engineering*, *Part D*, Vol. 211, pp. 425-426, (1997).
9. Queslati, F. and, Sankar, S., "A Class of Semi-Active Suspension Schemes for Vehicle Vibration Control", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 173, pp. 391-411, (1994).
10. Zhu, Q. and Ishitobi, M., "Chatic and Bifurcation in a Nonlinear Vehicle Model", *International Journal of sound and Vibration*, Vol. 275, pp. 1136-1146, (2004).
11. Zhu, Q. and Ishitobi, M., "Chaotic Vibration of a Nonlinear Full-Vehicle Model", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 747-759, (2006).
12. Shaohua, L. and Shaopu, Y., "Chaos in vehicle suspension system with hysteretic nonlinearity", *Journal of Vibration, Measure Diagnosis*, Vol. 23(2), pp. 86–89, (2003).

13. Calvo, J.A., Lopez, B., San, R.J.L. and Gauchia, A., "Influence of Shock absorber model on vehicle dynamic simulation", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineering, Part D: Journal of Automotive Engineering*, Vol. 223, pp. 189-203, (2009)
14. Shaopu, Y. and Yongjun, S., "*Bifurcation and singularity in hysteretic nonlinear system*", Beijing, Science Press, (2003).
15. Ding, Q., Leung, A.Y.T., Cooper, J.E., "Dynamic analysis of a self-excited hysteretic system", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 245, pp. 151–164, (2001).
16. Litak, G., Borowiec, M., Ali, M., Saha, L.M and Firswell, M.I., "Pulsive Feedback Control of a Quarter Car Model Forced by a Road Profile", *Journal of Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 33, pp. 1672-1676, (2007).
17. Litak, G., Borowiec, M., Firswell, M.I and Szabelski, K., "Chaotic Vibration of a Quarter-Car Model Excited by the Road Surface Profile", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 13, pp. 1373-1383, (2008).
18. Litak, G., Borowiec, M., Firswell, M.I. and Przystupa, W., "Chaotic Response of a Quarter Car Model Forced by a Road Profile with Stochastic Component", *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 39, pp. 2448-2456, (2009).
19. Samandari, H. and Rezaee, M. "The Stability and Chaos Analysis of a Nonlinear Wheeled Vehicle Model Under Road Excitation", *Proceeding of ASME 2010 10th Biennial conference on Engineering Systems Design and Analysis*, July 12-14, Istanbul, Turkey, (2010).
20. Jazar, R.N, "*Vehicle Dynamics Theory and Application*", Springer, New York, USA, (2008).
21. Lai, C.Y. and Liao, W.H, "Vibration Control of a Suspension System via a Magneto-Rheological Fluid Damper", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 8, pp. 527-547, (2002).
22. Du, H, Sze, K.Y. and Lam, J., "Semi Active H (infinity) Control of Vehicle Suspension with Magneto-Rheological Damper", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 283, pp. 981-996, (2005).
23. Fateh, M.M. and Alavi, S.S., "Impedance Control of an Active Suspension System", *Mechatronics*, Vol. 19, pp. 134-140, (2009).
24. Nayefeh, A.H. and Balakumar, B., "*Applied Nonlinear Dynamic, Analytical, Computational and Experimental Method* ", Wiley, New York, USA, (1995).
25. Hallar, G., "*Chaos near Resonance*", Springer, New York, USA, (1997).